# Exercice 55

Simplifier les expressions suivantes autant que possible :

**1** $e^{-x}\,e^{3}$

**2** $e^{-2\,x}\,e^{2\,x}$

**3** $(e^{x})^{4}\,e^{-3\,x}$

**4** $(e^{x})^{5}\,(e^{3})^{2}\,(e^{-x})^{3}$

**5** $\dfrac{e^{x+3}}{e^{x-3}}$

**6** $\dfrac{e^{x-4}}{e^{x+4}}$

**7** $\dfrac{e^{-x+2}}{e^{-2\,x-1}}$

**8** $\dfrac{(e^{x})^{2}\cdot e^{x-4}}{(e^{-2\,x+6})^{2}}$

$\boxed{1}$ $e^{-x}e^{3} = e^{3-x}$

$\boxed{2}$ $e^{-2x}e^{2x} = e^{0} = 1$

$\boxed{3}$ $(e^{x})^{4}e^{-3x} = e^{4x}e^{-3x} = e^{x}$

$\boxed{4}$ $(e^{x})^{5}(e^{3})^{2}(e^{-x})^{3} = e^{5x}\cdot e^{6}\cdot e^{-3x}$

$= e^{2x+6}$

$\boxed{5}$ $\dfrac{e^{x+3}}{e^{x-3}} = e^{x+3-(x-3)} = e^{6}$

$\boxed{6}$ $\dfrac{e^{x-4}}{e^{x+4}} = e^{x-4-x-4} = e^{-8}$

$\boxed{7}$ $\dfrac{e^{-x+2}}{e^{-2x-1}} = e^{-x+2+2x+1} = e^{x+3}$

$\boxed{8}$ $\dfrac{(e^{x})^{2}\cdot e^{x-4}}{(e^{-2x+6})^{2}} = \dfrac{e^{2x+x-4}}{e^{-4x+12}} = e^{3x-4+4x-12} = e^{7x-16}$

# Exercice 56

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

**1** $e^{x-1} = e^{-x+1}$

**2** $e^{5-x} = 1$

**3** $e^{x^2} = e$

**4** $(e^{x})^{2} = e^{4}$

**5** $e^{x^2} = e^{4}$

**6** $e^{x^2} = e^{3\,x}$

**7** $e^{\frac{1}{x}} = e^{4}$

**8** $e^{\frac{1}{x}} = e^{x}$

**9** $e^{x-1} = e^{\frac{2}{x}}$

**10** $e^{x-1} = e^{\frac{12}{x}}$

**11** $e^{-x} = \dfrac{2}{e^{x}-1}$

**12** $e^{-x} = \dfrac{2}{e^{x}+1}$

**13** $(e^{x})^{2} + 3\,e^{x} - 4 = 0$

**14** $4\,e^{2\,x} - e^{x} - 3 = 0$

**15** $e^{2\,x} + 6\,e^{x} + 8 = 0$

**16** $e^{2\,x} - (e+1)\,e^{x} + e = 0$

**17** $e^{2\,x} + (1+e)\,e^{x} + e = 0$

**18** $e^{2\,x} + (2-e^{2})\,e^{x} - 2\,e^{2} = 0$

$\boxed{1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$e^{x-1} = e^{-x+1}$

$\Leftrightarrow x-1 = -x+1$

$\Leftrightarrow x = 1$

$S = \{1\}$

$\boxed{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$e^{5-x} = 1$

$\Leftrightarrow e^{5-x} = e^0$

$\Leftrightarrow 5-x = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$

$S = \{5\}$

$\boxed{3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$e^{x^2} = e$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

$S = \{-1; 1\}$

$\boxed{4}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$(e^x)^2 = e^4$

$\Leftrightarrow 2x = 4$

$\Leftrightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

$\boxed{5}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$e^{x^2} = e^4$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

$S = \{-2; 2\}$

$\boxed{6}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$e^{x^2} = e^{3x}$

$\Leftrightarrow x^2 = 3x$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$

$S = \{0; 3\}$

$\boxed{7}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$e^{\frac{1}{x}} = e^4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = x$

$S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

$\boxed{8}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$e^{\frac{1}{x}} = e^x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = x$

$\Leftrightarrow 1 = x^2$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

$S = \{-1; 1\}$

$\boxed{9}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$e^{x-1} = e^{\frac{2}{x}}$

$\Leftrightarrow x-1 = \frac{2}{x}$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1^2 + 4 \cdot 2 \cdot 1$

$= 9 \ (>0)$

$x_1 = 2$ ou $x = 1$

$S = \{-1; 2\}$

$\boxed{10}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$e^{x-1} = e^{\frac{12}{x}}$

$\Leftrightarrow x - 1 = \frac{12}{x}$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$

$\Delta = 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 \ (>0)$

$x_1 = 4$ ou $x_2 = -3$

$S = \{-3; 4\}$

$\boxed{11}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$e^{-x} \neq \frac{2}{e^x - 1}$

$\Leftrightarrow e^{-x} \cdot (e^x - 1) \neq 2$

$\Leftrightarrow e^0 - 1 \neq 2$

$\Leftrightarrow 1 - 1 \neq 2$ ↯ impossible

$S = \emptyset$

$\boxed{12}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$e^{-x} = \frac{2}{e^{x+1}}$

$\Leftrightarrow e^{-x}(e^{x+1}) = 2$

$\Leftrightarrow e^0 + e^{-x} = 2$

$\Leftrightarrow e^{-x} = 1$

$\Leftrightarrow e^{-x} = e^0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

$\boxed{13}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$(e^x)^2 + 3e^x - 4 = 0$

Posons : $y=e^x$

$y^2+3y-4=0$

$\Delta = 3^2+4\cdot 1\cdot 4$

$= 25 \ (>0)$

$y_1=1$ ou $\underbrace{y_2=-4}_{}$

↯ impossible

$y=e^x$ et $y=1$

$\Leftrightarrow e^x=1$

$\Leftrightarrow x=0$

$S=\{0\}$

$\boxed{14}$ $\forall x\in\mathbb{R}$,

$4e^{2x}-e^x-3=0$

Posons que : $y=e^x$

$4y^2-y-3=0$

$\Delta = 1^2+4\cdot 4\cdot 3$

$= 49 \ (>0)$

$y_1=1$ ou $\underbrace{y_2=-\frac{3}{4}}_{}$

impossible ↯

$y=e^x$ et $y=1=e^0$

$\Leftrightarrow e^x=e^0$

$\Leftrightarrow x=0$

$S=\{0\}$

$\boxed{15}$ $\forall x\in\mathbb{R}$,

$e^{2x}+6e^x+8=0$

Posons que: $y=e^x$

$y^2+6y+8=0$

$\Delta=6^2-4\cdot 1\cdot 8$

$=$

$\underbrace{y_1=-2 \text{ ou } y_2=-4}_{}$

impossible ↯

$S=\emptyset$

$\boxed{16}$ $\forall x\in\mathbb{R}$,

$e^{2x}-(e+1)e^x+e=0$

Posons que : $y=e^x$

$y^2-(e+1)y+e=0$

$\Delta=(e+1)^2-4\cdot 1\cdot e$

$=2,9524\ldots$

$y_1=2,718\ldots$ ou $y_2=1$

$=e$

$y=e^x$ et $y_1=e$ ou $y_2=1=e^0$

$\Leftrightarrow e^x=e^1$ ou $e^x=e^0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=0$

$S=\{0;1\}$

$\boxed{17}$ $\forall x\in\mathbb{R}$,

$e^{2x}+(1+e)e^x+e=0$

Le membre de gauche est toujours positif.

Donc, $S=\emptyset$

$\boxed{18}$ $\forall x\in\mathbb{R}$,

$e^{2x}+(2-e^2)e^x-2e^2=0$

Posons que : $e^x=y$

$y^2+(2-e^2)y-2e^2=0$

$\Delta=(2-e^2)^2+4\cdot 1\cdot 2e^2$

$=88,15\ldots \ (>0)$

$y_1=e^2$ ou $\underbrace{y_2=-2}_{}$

impossible ↯

$y=e^x$ et $y=e^2$

$\Leftrightarrow e^x=e^2$

$\Leftrightarrow x=2$

$S=\{2\}$

## Exercice 57

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{4x} \leq e^{x}$
2. $e^{x^2} > 1$
3. $e^{x^2} \geq e^{3x}$
4. $e^{x^2} > e^{-7x}$
5. $e^{x^2} \leq e$
6. $(9 - x^2)\, e^{-x} \leq 0$
7. $(1 - x^2)\, e^{x} \leq 0$
8. $(4 - x^2)\, e^{x} > 0$
9. $e^{x^2} > e^{3x+10}$
10. $e^{x^2+2x} < 1$
11. $e^{x-2} < e^{\frac{3}{x}}$
12. $e^{2x+5} \geq e^{\frac{12}{x}}$
13. $e^{2x} + 5\,e^{x} - 6 > 0$
14. $e^{x} + 4\,e^{-x} + 4 \geq 0$
15. $e^{x} + e^{-x} - 2 > 0$

$\boxed{1}$ $\forall x \in \mathbb{R},$

$e^{4x} \leq e^{x}$

$\iff 4x \leq x$

$\iff x = 0$

$S = \mathbb{R}_+$

$\boxed{2}$ $\forall x \in \mathbb{R},$

$e^{x^2} > 1$

$\iff x^2 > e^0$

$\iff x^2 > 0$

$S = \mathbb{R}^*$

$\boxed{3}$ $\forall x \in \mathbb{R},$

$e^{x^2} \geq e^{3x}$

$\iff x^2 \geq 3x$

$\iff x(x-3) \geq 0$

$\iff x \geq 0$ et $x \geq 3$

ou $x \leq 0$ et $x \leq 3$

$S = \,]-\infty; 0] \cup [3; +\infty[$

$\boxed{4}$ $\forall x \in \mathbb{R},$

$e^{x^2} > e^{-7x}$

$\iff x^2 > -7x$

$\iff x(x-7) > 0$

T.d.s

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-7$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x(x-7)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S = \,]-\infty; 0[ \cup ]7; +\infty[$

$\boxed{5}$ $\forall x \in \mathbb{R},$

$e^{x^2} \leq e$

$\iff x^2 \leq 1$

$\iff (x-1)(x+1) \leq 0$

T.d.s

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S = [-1; 1]$

$\boxed{6}$ $\forall x \in \mathbb{R},$

$(9-x^2)\, e^{-x} \leq 0$ $\quad | \cdot e^{x} < 0$

$\iff 9 - x^2 \leq 0$

$\iff (3-x)(3+x) \leq 0$

T.d.s

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $3+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $9-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$S = \,]-\infty; -3[ \cup ]3; +\infty[$

**7** $\forall x \in \mathbb{R}$,

$(1-x^2)e^x \leq 0 \quad | \cdot e^{-x} > 0$

$\Leftrightarrow 1-x^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (1-x)(1+x) \leq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $1+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $1-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$S = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

**8** $\forall x \in \mathbb{R}$,

$(4-x^2)e^x > 0 \quad | \cdot e^x > 0$

$\Leftrightarrow (2-x)(2+x) > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2-x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $2+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $4-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$S = ]-2; 2[$

**9** $\forall x \in \mathbb{R}$,

$e^{x^2} > e^{3x+10}$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 9 + 4 \cdot 1 \cdot 10 = 7^2 \ (>0)$

$x_1 = 5$ et $x_2 = -1$

| | $-\infty$ | | $-1$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-3x-10$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S = ]-\infty; 2[ \cup ]5; +\infty[$

**10** $\forall x \in \mathbb{R}$,

$e^{x^2+2x} < 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x < 0$

$\Leftrightarrow x(x+2) < 0$

T.d.S

| | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x^2+2x$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |

$S = ]-\infty; 2[ \cup ]0; +\infty[$

**11** $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$e^{x-2} < e^{\frac{3}{x}}$

$\Leftrightarrow x - 2 < \frac{3}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{x} < 0$

Racines : $x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 3$

$= 4^2 \ (<0)$

$x_1 = 3$ ou $x_2 = -1$

T.d.S.

| | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2x-3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{x^2-2x-3}{x}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S = ]-\infty; -1[ \cup ]0; 3[$

$\boxed{12}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*,$

$$e^{2x+5} \geq e^{\frac{12}{x}}$$

$$\Leftrightarrow 2x+5 \geq \frac{12}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+5x-12}{x} \geq 0$$

<u>Racines:</u> $2x^2+5x-12=0$

$$\Delta = b^2-4ac = 25+4\cdot 2\cdot 12$$
$$= 11^2 \ (>0)$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = -4$$

<u>T.d.S.</u>

| | $-\infty$ | $-4$ | | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $2x^2+5x-12$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{2x^2+5x-12}{x}$ | $-$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | | $+$ |

$$S = [-4\,;0[ \,\cup\, [\tfrac{3}{2}\,;+\infty[$$

$\boxed{13}$ $\forall x \in \mathbb{R},$

$$e^{2x}+5e^x-6>0$$

Posons : $e^x = y$

$$y^2+5y-6>0$$

$$\Delta = 25+4\cdot 1\cdot 6$$
$$= 7^2 \ (>0)$$

$y_1 = 1$ ou $\underbrace{y_2 = -6}_{\text{impossible ↯}}$

$y = e^x$ et $y = 1$

$$\Leftrightarrow e^x = e^0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$S = \mathbb{R}^*_+$$

$\boxed{14}$ $\forall x \in \mathbb{R},$

$$e^x + 4e^{-x} + 4 \geq 0 \quad \Big|\cdot e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{2x}}_{>0} + \underbrace{4e^x}_{>0} + 4 \geq 0$$

Donc toujours vrai !

$$S = \mathbb{R}$$

$\boxed{15}$ $\forall x \in \mathbb{R},$

$$e^x + e^{-x} - 2 > 0 \quad \Big|\cdot e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 > 0$$

Posons : $y = e^x$

$$y^2 - 2y + 1 > 0$$

$$\Delta = b^2-4ac = 4-4\cdot 1\cdot 1 = 0$$

une solution réelle double

$$y = -\frac{b}{2a} = +\frac{+2}{2\cdot 1} = 1$$

$y = e^x$ et $y = 1$

$$\Leftrightarrow e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$S = \mathbb{R}^*$$

# Exercice 58

Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

**1** $e^x + 4e^{-x} + 5 = 0$

**2** $2e^{-x} - 3e^{-2x} + 1 = 0$

**3** $3e^{-2x} + e^{-x} - 4 = 0$

**4** $4e^x - 5e^{-x} + 1 = 0$

$\boxed{1}$ $e^x + 4e^{-x} + 5 = 0 \quad | \cdot e^x > 0$

$\iff \underbrace{e^{2x} + 5e^x}_{>0} + 4 = 0$

impossible ↯

$S = \emptyset$

$\boxed{2}$ $2e^{-x} - 3e^{-2x} + 1 = 0 \quad | \cdot e^{2x}$

$\iff e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$

Posons : $e^x = y$

$y^2 + 2y - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4^2 \; (>0)$

deux solutions réelles

$y_1 = 1$ ou $\underbrace{y_2 = -3}_{\text{impossible ↯}}$

$e^x = y$ et $y = 1$

$\iff e^x = e^0$

$\iff x = 0$

$S = \{0\}$

$\boxed{3}$ $3e^{-2x} + e^{-x} - 4 = 0 \quad | \cdot e^x > 0$

$\iff -4e^{2x} + e^x + 3 = 0$

Posons : $y = e^x$

$-4y^2 + y + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 7^2$

deux solutions réelles

$y_1 = 1$ ou $\underbrace{y_2 = -\frac{3}{4}}_{\text{impossible ↯}}$

$y = 1$ et $y = e^x$

$\iff e^x = 1$

$\iff x = 0$

$S = \{0\}$

$\boxed{4}$ $4e^x - 5e^{-x} + 1 = 0 \quad | \cdot e^x > 0$

$\iff 4e^{2x} + e^x - 5 = 0$

Posons : $y = e^x$

$4y^2 + y - 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 5 = 9^2 \; (>0)$

deux solutions réelles

$y_1 = 1$ ou $\underbrace{y_2 = -\frac{5}{4}}_{\text{impossible ↯}}$

$y = e^x$ et $y = 1 \iff e^x = 1$

$\iff x = 0$

$S = \{0\}$

## Exercice 59

Calculer la dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$ indiqué :

**1** $f(x)=e^{2x}-2x+5 \quad (I=\mathbb{R})$

**2** $f(x)=(3x+1)\,e^{x} \quad (I=\mathbb{R})$

**3** $f(x)=(x^2-1)\,e^{2x} \quad (I=\mathbb{R})$

**4** $f(x)=(2x-1)\,e^{-x} \quad (I=\mathbb{R})$

**5** $f(x)=(x^2-2x+3)\,e^{-x} \quad (I=\mathbb{R})$

**6** $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1} \quad (I=\mathbb{R})$

**7** $f(x)=\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^x} \quad (I=\mathbb{R}_+^*)$

**8** $f(x)=\dfrac{1}{x}\,e^{-x} \quad (I=\mathbb{R}_+^*)$

**9** $f(x)=x+4-\dfrac{e^x}{e^x+2} \quad (I=\mathbb{R})$

**10** $f(x)=e^{4x+2}\cdot(x^2-2x) \quad (I=\mathbb{R})$

**11** $f(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} \quad (I=\mathbb{R})$

**12** $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}+e^{-x} \quad (I=]-2;+\infty[)$

**13** $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (I=\mathbb{R}_+^*)$

**14** $f(x)=e^{\frac{2x-8}{2x+8}} \quad (I=]-4;+\infty[)$

**15** $f(x)=\dfrac{4}{e^{2x}+1} \quad (I=\mathbb{R})$

**16** $f(x)=e^{\sin(2x)} \quad (I=\mathbb{R})$

**17** $f(x)=e^{-x}\cdot\cos(2x) \quad (I=\mathbb{R})$

**18** $f(x)=\sin(2x)\cdot e^{\cos(2x)} \quad (I=\mathbb{R})$

$\boxed{1}$ $\forall x\in I,$

$$f'(x)=(e^{2x}-2x+5)'$$
$$=2e^{2x}-2$$

$\boxed{2}$ $\forall x\in I,$

$$f'(x)=[(3x+1)e^x]'$$

$u(x)=3x+1 \quad u'(x)=3$

$v(x)=e^x \quad v'(x)=e^x$

$$=3\cdot e^x+(3x+1)e^x$$
$$=4e^x+3xe^x$$

$\boxed{3}$ $\forall x\in I,$

$$f'(x)=[(x^2-1)e^{2x}]'$$

$u(x)=x^2-1 \quad u'(x)=2x$

$v(x)=e^x \quad v'(x)=e^x$

$$=2xe^x+(x^2-1)e^x$$
$$=x^2e^x+2xe^x-e^x$$

$\boxed{4}$ $\forall x\in I,$

$$f'(x)=[(2x-1)e^{-x}]'$$

$u(x)=2x-1 \quad u'(x)=2$

$v(x)=e^{-x} \quad v'(x)-e^{-x}$

$$=2\cdot e^{-x}-e^{-x}(2x-1)$$
$$=2e^{-x}-2xe^{-x}+e^{-x}$$
$$=3e^{-x}-2xe^{-x}$$

$\boxed{5}$ $\forall x\in I,$

$$f'(x)=[(x^2-2x+3)e^{-x}]'$$

$u(x)=x^2-2x+3 \quad u'(x)=2x-2$

$v(x)=e^{-x} \quad v'(x)=-e^{-x}$

$$=(2x-2)e^{-x}-(x^2-2x+3)e^{-x}$$
$$=2xe^{-x}-2e^{-x}-x^2e^{-x}+2xe^{-x}-3e^{-x}$$
$$=-x^2e^{-x}+4xe^{-x}-5e^{-x}$$

$\boxed{6}$ $\forall x\in I,$

$$f'(x)=\left[\frac{e^x-1}{e^x+1}\right]'$$

$u(x)=e^x-1 \quad u'(x)=e^x$

$v(x)=e^x+1 \quad v'(x)=e^x$

$$=\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{\cancel{e^{2x}}+e^x-\cancel{e^{2x}}+e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$\boxed{7}$ $\forall x\in I,$

$$f'(x)=\left[\frac{1+e^{-x}}{1-e^x}\right]'$$

$u(x)=1+e^{-x} \quad u'(x)=-e^{-x}$

$v(x)=1-e^x \quad v(x)=-e^x$

$$=\frac{-e^{-x}(1-e^x)+e^x(1+e^{-x})}{(1+e^x)^2}$$

$$=\frac{-e^{-x}+e^0+e^x+e^0}{(1+e^x)^2}$$

$$=\frac{e^x+2-e^{-x}}{(1+e^x)^2}$$

$\boxed{8}$ $\forall x\in I,$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}e^{-x}\right)'$$

$u(x)=\frac{1}{x} \quad u'(x)=-\frac{1}{x^2}$

$v(x)=e^{-x} \quad v'(x)=-e^{-x}$

$$=-\frac{e^{-x}}{x^2}-\frac{e^{-x}}{x}$$

$$=-\frac{e^{-x}-xe^{-x}}{x^2}$$

$$=-\frac{e^{-x}(1-x)}{x^2}$$

$\boxed{9}$ $\forall x\in I,$

$$f'(x)=x+4-\frac{e^x}{e^x+2}$$

$u(x)=e^x \quad u'(x)=e^x$

$v(x)=e^x+2 \quad v'(x)=e^x$

$$=1-\frac{\cancel{e^{2x}}+2e^x-\cancel{e^{2x}}}{(e^x+2)^2}$$

$$=1-\frac{2e^x}{(e^x+2)^2}$$

$$=\frac{(e^x+2)^2-2e^x}{(e^x+2)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+\cancel{2e^x}+4-\cancel{2e^x}}{(e^x+2)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+4}{(e^x+2)^2}$$

$\boxed{10}$ $\forall x\in I,$

$$f'(x)=\left[e^{4x+2}(x^2-2x)\right]'$$

$u(x)=e^{4x+2} \quad u'(x)=4e^{4x+2}$

$v(x)=x^2-2x \quad v'(x)=2x-2$

$$=4e^{4x+2}(x^2-2x)+e^{4x+2}(2x-2)$$

$$=4x^2e^{4x+2}-8xe^{4x+2}+2xe^{4x+2}-2e^{4x+2}$$

$$=4x^2e^{4x+2}-6xe^{4x+2}-2e^{4x+2}$$

$\boxed{11}$ $\forall x\in I,$

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'$$

$$=\left(\frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\right)'$$

$u(x)=e^x \quad u'(x)=e^x$

$v(x)=e^{2x}+2e^x+1 \quad v'(x)=2e^{2x}+2e^x$

$$= \frac{e^x\left(e^{2x}+2e^x+1\right) - e^x\left(2e^{2x}+2e^x\right)}{e^{2x}+2e^x+1}$$

$$= \frac{e^x\left(-e^{2x}+1\right)}{e^{2x}+2e^x+1}$$

$\boxed{12}$ $\forall x \in I,$

$$f'(x) = \left(\frac{x-2}{x+2} + e^{-x}\right)'$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = x-2 & u'(x) = 1 \\ v(x) = x+2 & v'(x) = 1 \end{array} \right.$$

$$= \frac{x-2-(x+2)}{(x+2)^2} - e^{-x}$$

$$= \frac{x-2-x-2}{(x+2)^2} - e^{-x}$$

$$= \frac{-4\left(-e^{-x}(x^2+2x+4)\right)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{4e^{-x}(x^2+2x+4)}{(x+2)^2}$$

$\boxed{13}$ $\forall x \in I,$

$$f'(x) = \left[\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}\right]'$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = 1-\frac{1}{x} & u'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ v(x) = e^{\frac{1}{x}} & v'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \end{array} \right.$$

$$= -\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}} + \left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3}\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$= -\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$\boxed{14}$ $\forall x \in I,$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{2x-8}{2x+8}}\right)'$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = 2x-8 & u'(x) = 2 \\ v(x) = 2x+8 & v'(x) = 2 \end{array} \right.$$

$$= \frac{\cancel{4x}+16-\cancel{4x}+16}{(2x+8)^2} e^{\frac{2x-8}{2x+8}}$$

$$= \frac{32}{(2x+8)^2} e^{\frac{2x-8}{2x+8}}$$

$\boxed{15}$ $\forall x \in I,$

$$f'(x) = \frac{4}{e^{2x}+1}$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = 4 & u'(x) = 0 \\ v(x) = e^{2x}+1 & v'(x) = 2e^{2x} \end{array} \right.$$

$$= \frac{-8e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$\boxed{16}$ $\forall x \in I,$

$$f'(x) = \left(e^{\sin(2x)}\right)'$$

$$u(x) = \sin(2x) \quad u'(x) = 2\cos(2x)$$

$$= 2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$$

$\boxed{17}$ $\forall x \in I,$

$$f'(x) = \left[e^{-x}\cdot\cos(2x)\right]'$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = e^{-x} & u'(x) = -e^{-x} \\ v(x) = \cos(2x) & v'(x) = -2\sin(2x) \end{array} \right.$$

$$= -e^{-x}\cos(2x) - e^{-x}\left[2\sin(2x)\right]$$

$$= -e^{-x}\left[\cos(2x) - 2\sin(2x)\right]$$

$\boxed{18}$ $\forall x \in I,$

$$f'(x) = \left[\sin(2x)e^{\cos(2x)}\right]'$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \sin(2x) & u'(x) = 2\cos(2x) \\ v(x) = e^{\cos(2x)} & v'(x) = -2\sin(2x)e^{\cos(2x)} \end{array} \right.$$

$$= 2\cos(2x)e^{\cos(2x)} - 2\sin^2(2x)e^{\cos(2x)}$$

$$= 2e^{\cos(2x)}\left[\cos(2x) - \sin^2(2x)\right]$$

## Exercice 60

Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$ :

**1** $f(x) = e^x + e^{-x}$

**2** $f(x) = e^{x^2 - x}$

**3** $f(x) = \frac{1}{x}\, e^{\frac{1}{x}}$

**4** $f(x) = e^{2x} + e^x + 3$

**5** $f(x) = e^{2x} - e^x + 3$

**6** $f(x) = 4\, e^{2x} - e^x - 1$

**7** $f(x) = 2\, x\, e^{-x}$

**8** $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$

**9** $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

**10** $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^3}$

**11** $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x + 1}$

**12** $f(x) = \dfrac{e^x - 3}{x^3 + 2}$

**13** $f(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$

**14** $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{e^x}$

**15** $f(x) = \dfrac{e^{2x} - e^x - 1}{e^x + 3}$

**16** $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^x - 1}{e^{2x} - e^x + 2}$

**17** $f(x) = \dfrac{e^{2x} + 5\, e^x - 2}{e^{3x} - e^{2x} + e^x + 4}$

**18** $f(x) = \dfrac{e^{2x} - e^x - 2}{x^2 + 2}$

**19** $f(x) = \dfrac{e^{2x} + 1}{x^2 - 3}$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{e^x}_{\to +\infty} + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}$

$= +\infty$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\overbrace{x^2 - x}^{\to +\infty}}$

$= +\infty$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} \to 1}{x \to +\infty}$

$= 0$

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \overbrace{e^{2x}}^{\to +\infty} + \underbrace{e^x}_{\to +\infty} + 3$

$= +\infty$

$\boxed{5}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - e^x + 3$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \overbrace{e^x}^{\to +\infty} \underbrace{(e^x - 1)}_{\to +\infty}$

$= +\infty$

$\boxed{6}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4e^{2x} - e^x - 1$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{e^{2x}}_{\to +\infty} \underbrace{(4 - e^{-x} - e^{-2x})}_{\to 4}$

$= +\infty$

$\boxed{7}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2xe^{-x}$

$= 0$

$\boxed{8}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} \cdot \dfrac{e^x}{x}$

$= +\infty$

$\boxed{9}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$

$= +\infty$

$\boxed{10}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$

$= +\infty$

$\boxed{11}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 1}{x + 1}$

$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to +\infty} \underbrace{\frac{1 + e^{-x}}{1 + \frac{1}{x}}}_{\to 1}$

$= +\infty$

$\boxed{12}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 3}{x^3 + 2}$

$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x^3}}_{\to +\infty} \underbrace{\frac{1 - 3e^{-x}}{1 + 2x^{-3}}}_{\to 1}$

$= +\infty$

$\boxed{13}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{(x+1)^2}$

$= +\infty$

$\boxed{14}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^2}{e^x}$

$= 0$

$\boxed{15}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - e^x - 1}{e^x + 3}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{e^x}$

$= +\infty$

$\boxed{16}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^{2x} - e^x + 2}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}}$

$= 1$

$\boxed{17}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} + 5e^x - 2}{e^{3x} - e^{2x} + e^x + 4}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{e^{3x}}$

$= 0$

$\boxed{18}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - e^x - 2}{x^2 + 2}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$

$= +\infty$

$\boxed{19}$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{x^2 - 3}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$

$= +\infty$

## Exercice 61

Déterminer la limite de la fonction $f$ en $-\infty$ :

**1** $f(x) = e^{x^2-x}$

**2** $f(x) = \dfrac{e^{2x}+2e^x}{x^2-1}$

**3** $f(x) = (x+2)\,e^x$

**4** $f(x) = (x^3-x)\,e^x$

**5** $f(x) = \dfrac{e^x-3}{e^x+3}$

**6** $f(x) = \dfrac{x^2+x}{e^x}$

**7** $f(x) = \dfrac{e^{-x}-2}{e^{-x}+2}$

**8** $f(x) = \dfrac{e^{-2x}-e^{-x}}{e^{-x}+3}$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2-x}$

$= 0$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}+2e^x}{x^2-1}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2}$

$= +\infty$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+2)e^x$

$= 0$

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3-x)e^x$

$= 0$

$\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-3}{e^x+3}$

$= -1$

$\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-x}{e^x}$

$= +\infty$

$\boxed{7}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}-2}{e^{-x}+2}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}}$

$= 1$

$\boxed{8}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-2x}-e^{-x}}{e^{-x}+3}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-2x}}{e^{-x}}$

$= 0$

## Exercice 62

Déterminer la limite de la fonction $f$ en $0^+$ :

**1** $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

**2** $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x^2}$

**3** $f(x) = \dfrac{1 - e^x}{x}$

**4** $f(x) = \dfrac{e^{5x} - 1}{5x}$

**5** $f(x) = \dfrac{e^{5x} - 1}{2x}$

**6** $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{4x}$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x \;)\to 1}{x \;)\to 0^+}$

$= +\infty$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{3x} \;)\to 1}{x^2 \;)\to 0^+}$

$= +\infty$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - e^x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} - \dfrac{e^x - 1}{x}$

$= -1$

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{5x} - 1}{5x}$

$= 1$

$\boxed{5}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{5x} - 1}{2x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+}$

$\boxed{6}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - e^{-x}}{4x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{-x}}{4} \underbrace{\dfrac{e^x - 1}{x}}_{\to 1}$

$= -\infty$

## Exercice 63

La fonction $f$ est définie par l'expression ci-contre.
Vérifier si $\mathscr{C}_f$ admet une(des) asymptote(s) horizontale(s).

**1** $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 2} + e^{-x}$

**2** $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$

**3** $f(x) = \dfrac{e^{-x} - 2}{e^{-x} + 2}$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-2}{x+2} + e^{-x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{x} + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}$

$= 3$

$\Rightarrow$ A.H. $= y = 3$ en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{\dfrac{3x-2}{x+2}}_{\to 3} + \underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty}$

$= +\infty$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2e^x}$

$= \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ A.H. : $y = \dfrac{1}{2}$ en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\overbrace{e^x - 1}^{\to -1}}{\underbrace{2e^x + 1}_{\to 1}}$

$= -1$

A.H. : $y = -1$ en $-\infty$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} - 2}{e^{-x} + 2}$

$= -1$

A.H. : $y = -1$ en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} - 2}{e^{-x} + 2}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\cancel{e^{-x}}}{\cancel{e^{-x}}} \dfrac{1 - 2e^x}{1 + 2e^x}$

$= 1$

A.H. : $y = 1$ en $-\infty$

## Exercice 64

$f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 4 + e^{-2x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**1** Démontrer que la droite $d$ d'équation $y = -x + 4$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant $f$ en $+\infty$.

**2** Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $d$.

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \to +\infty} [\cancel{-x} \cancel{+4} + e^{-2x} \cancel{+x} \cancel{-4}]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x}$

$= 0$

Donc $y$ est une A.O. de $f(x)$.

$\boxed{2}$ Soit $\varphi(x) = f(x) - y$ ; $D_\varphi = \mathbb{R}$

$= e^{-2x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) > 0$, donc $\mathscr{C}_f / d$

## Exercice 65

$f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\,x + 3 - e^{-3x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**1** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$, notée $d$, dont on déterminera l'équation réduite.

**2** Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $d$.

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+3-e^{-3x}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{e^{-3x}}{x}}_{\to 0}$

$= 2 \quad (= a)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \cancel{2x} + 3 - e^{-3x} \cancel{-2x}$

$= 3 \quad (= b)$

Donc $\mathscr{C}_f$ admet une A.O., $d$ : $y = 2x+3$ en $+\infty$

$\boxed{2}$ Soit : $\varphi(x) = f(x) - (2x+3)$

$= -e^{-3x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ : $\varphi(x) < 0$, donc $d / \mathscr{C}_f$

## Exercice 66

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2\,x} - e^{x} + 3\,x - 4$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

**1** Déterminer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$ et interpréter graphiquement.

**2** Montrer que $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

**3** Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $-\infty$, notée $\Delta$, dont on déterminera une équation.

**4** Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\Delta$.

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^{2x}}_{\to 0} - \underbrace{e^{x}}_{\to 0} + \underbrace{3x}_{\to -\infty} - 4$

$= -\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x} - e^{x} + 3x - 4$

$= +\infty$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} - e^{x} + 3x - 4}{x}$

$\displaystyle = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x} - \frac{e^{x}}{x} + 3 - \frac{4}{x}$

$\displaystyle = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x} \underbrace{\left( 1 - \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{3x}{e^{2x}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{4}{e^{2x}}}_{\to 0} \right)}_{\to 1}$

$= +\infty$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - e^{x} + 3x - 4}{x}$

$\displaystyle = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{e^{2x}}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{e^{x}}{x}}_{\to 0} + 3 - \underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}$

$= 3 \quad (= a)$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left[ f(x) - 3x \right] = \lim_{x\to-\infty} \overbrace{e^{2x}}^{\to 0} - \overbrace{e^{x}}^{\to 0} \cancel{+3x} - 4 \cancel{-3x}$

$= -4$

Donc $\mathscr{C}_f$ admet une A.O. $\Delta = y = 3x - 4$

$\boxed{4}$ Soit $\varphi(x) = f(x) - 3x + 4$

$= e^{2x} - e^{x} \cancel{+3x} \cancel{-4} \cancel{-3x} \cancel{+4}$

$= e^{2x} - e^{x}$

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = e^{x}$

$\Leftrightarrow 2x = x$

$\Leftrightarrow x = 0$

T.d.s.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | | $\Delta / \mathscr{C}_f$ | $\Delta \cap \mathscr{C}_f$ | $\mathscr{C}_f / \Delta$ | |

## Exercice 67

Dans un repère, on a tracé les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x}+1)$ et $g(x) = e^x$, ainsi que la droite $\Delta$ d'équation $y = x+1$.

**1** Prouver que $\Delta$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ et à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

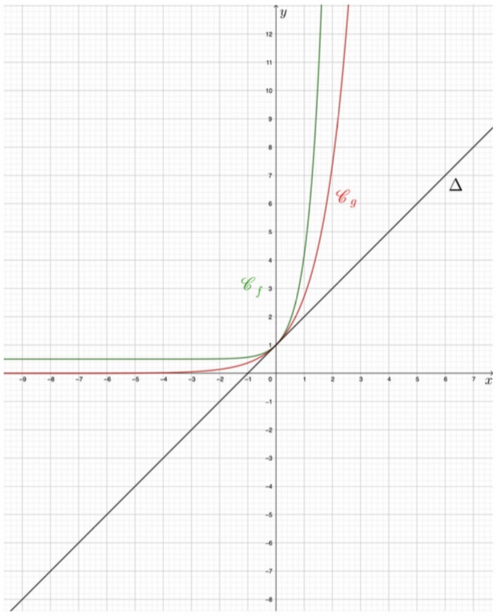
**2** On se propose de démontrer la conjecture suivante :

*$\mathscr{C}_g$ est entre $\Delta$ et $\mathscr{C}_f$.*

**a.** Justifier que $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\Delta$.

**b.** Justifier que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

**c.** Quel encadrement de $e^x$ ($x \in \mathbb{R}$) peut-on en déduire ?




$\boxed{1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left[\frac{1}{2}(e^{2x}+1)\right]'$ et $g'(x) = e^x$

$= e^{2x}$

$T_f \equiv y_f = f'(0)(x-0)+f(0) = e^{2\cdot 0}(x-0)+1 = x+1$

$T_g = y_g = g'(0)(x-0)+g(0) = e^0(x-0)+1 = x+1$

⊜

$y_f = y_g = \Delta$.

$\boxed{2}$

a. Soit : $\varphi(x) = g(x) - \Delta$

$= e^x - x - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^x - 1$

Racines : $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

T.d.V.

| | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\varphi(x)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

$\varphi'(0) = e^0 - 1 = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(x) > 0$, donc $\mathcal{C}_f / \Delta$

b. Soit : $\varphi(x) = f(x) - g(x)$

$$= \frac{1}{2}(e^{2x}+1) - e^x$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \frac{1}{2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^{2x} - e^x$

$$= e^x(e^x - 1)$$

<u>Racines</u> : $\varphi'(x) = 0 \iff e^x(e^x - 1) = 0$

$$\iff \underbrace{e^x = 0}_{\text{impossible } \lightning} \text{ ou } e^x = 1$$

$$\iff x = 0$$

<u>T.d.V.</u>

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\varphi(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

$\varphi(0) = \frac{1}{2}e^0 - e^0 + \frac{1}{2}$

$= 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(x) > 0$, donc $\mathcal{C}_f / \mathcal{C}_g$

c. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+1 \leq e^x \leq \frac{1}{2}(e^{2x}+1)$

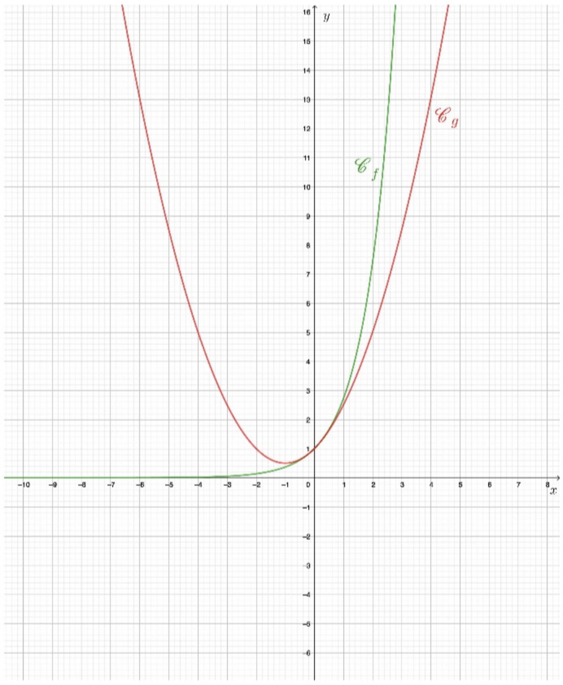
## Exercice 68

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentent les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$$

**1** Prouver que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune $T_0$ au point d'abscisse 0.

**2** On se propose d'étudier la position relative des deux courbes.




On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $\varphi$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad \varphi(x) = f(x) - g(x)$$

**a.** Calculer $\varphi'(x)$.

**b.** En déduire le tableau de variation de $\varphi$.

**c.** Conclure quant à la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

$\boxed{1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$ et $g'(x) = x + 1$

$T_f \equiv y_f = f'(0)(x-0) + f(0) = e^0(x-0) + e^0 = x + 1$

$T_g \equiv y_g = g'(0)(x-0) + g(x) = (0+1)(x-0) + 1 = x + 1$

$=$

$y_f = y_g = T_0$

$\boxed{2}$

a. $\varphi(x) = f(x) - g(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = e^x - x - 1$

b. <u>Racines</u> : $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) = e^x - 1$

<u>Racines</u> : $\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\varphi'(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |
| Donc, $\varphi'(x)$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\varphi(x)$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

$\varphi'(0) = e^{x} - 0 - 1 = 0$

$\varphi(0) = e^{0} - \frac{0^2}{2} - 0 - 1 = 0$

c. Position relative de $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | | $\mathscr{C}_g / \mathscr{C}_f$ | $\mathscr{C}_g \cap \mathscr{C}_f$ | $\mathscr{C}_f / \mathscr{C}_g$ | |

## Exercice 69

$f$ est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2\,e^x + 1}{e^x - 1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**1** Déterminer le ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction $f$.

**2** Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes horizontales, notées $d_1$ et $d_2$ et une asymptote verticale, notée $d_3$.

**3** **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \in \mathscr{D}_f$.

**b.** Étudier les variations de $f$.

**c.** Tracer $\mathscr{C}_f$, $d_1$ et $d_2$ dans un même repère orthonormé d'unité 1 cm.

$\boxed{1}$ C.E. : $e^x - 1 \neq 0 \iff e^x \neq 1$

$\iff e^x \neq e^0$

$\iff x \neq 0$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

$\boxed{2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{2e^x}^{\to 0}+1}{\underbrace{e^x}_{\to 0}-1}$$

$$= -1$$

$\Rightarrow$ A.H. : $y = -1$ en $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x+1}{e^x-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{e^x}\overbrace{\left(1+\frac{1}{2}e^{-x}\right)}^{\to 1}}{\cancel{e^x}\underbrace{\left(1-e^{-x}\right)}_{\to 1}}$$

$$= 2$$ $\Rightarrow$ A.H. : $y = 2$ en $+\infty$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{\overbrace{2e^x+1}^{\to 3}}{\underbrace{e^x-1}_{\to 0^-}}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\overbrace{2e^x+1}^{\to 3}}{\underbrace{e^x-1}_{\to 0^+}}$$

$$= +\infty$$

$\Rightarrow$ A.V. : $x = 0$

$\boxed{3}$

a. $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \left(\frac{2e^x+1}{e^x-1}\right)'$

$u(x) = 2e^x+1 \qquad u'(x) = 2e^x$

$v(x) = e^x-1 \qquad v'(x) = e^x$

$$= \frac{2e^x(e^x-1)-e^x(2e^x+1)}{(e^x-1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2e^{2x}}-2e^x-\cancel{2e^{2x}}-e^x}{(e^x-1)^2}$$

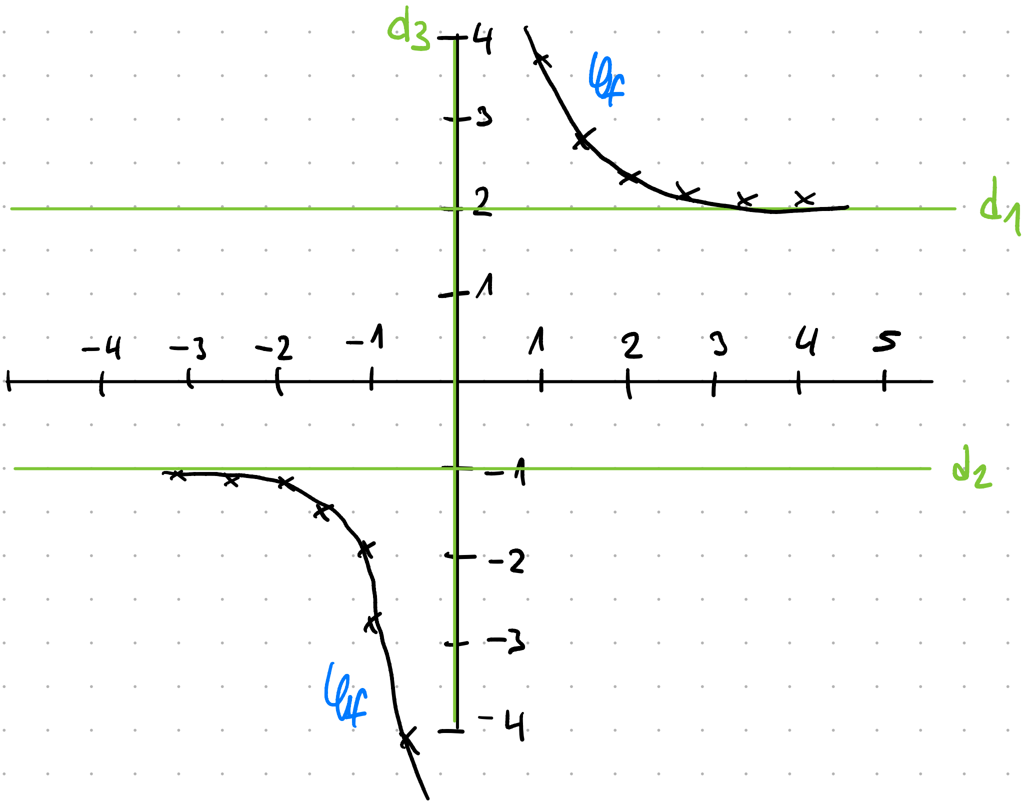
$$= -\frac{3e^x}{(e^x-1)^2}$$

b) $f'(x) = \frac{-3e^x}{(e^x-1)^2}$ $\begin{matrix} <0 \\ >0 \end{matrix}$

T.d.V.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\|$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ $\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ |

c.




## Exercice 70

$f$ est la fonction définie par $f(x) = e^{\frac{1-2x}{1+2x}}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer le ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction $f$.
2. Calculer les limites aux bornes du ensemble et interpréter graphiquement.
3. Étudier les variations de $f$.
4. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 1 cm en faisant apparaître toutes les informations déterminées précédemment.

$\boxed{1}$ C.E. : $1+2x \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1-2x}{1+2x}}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{-\cancel{2x}}{\cancel{2x}}}) \to -1$

$= e^{-1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1-2x}{1+2x}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{-\cancel{2x}}{\cancel{2x}}}) \to -1$

$= e^{-1}$

$\Rightarrow$ A.H. : $y = e^{-1}$ en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} e^{\frac{1-2x \;\to 2}{1+2x \;\to 0^+}}$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} e^{\frac{1-2x \;\to 2}{1+2x \;\to 0^-}}$

$= -\infty$

A.V. : $x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{3}$ $\forall x \in D_f,\quad f'(x) = \left(e^{\frac{1-2x}{1+2x}}\right)'$

$$= \frac{-2(1+2x)-2(1-2x)}{(1+2x)^2}\, e^{\frac{1-2x}{1+2x}}$$

$$\left|\begin{array}{ll} u(x) = 1-2x & u'(x) = -2 \\ v(x) = 1+2x & v'(x) = 2 \end{array}\right.$$

$$= \frac{-2-\cancel{4x}-2+\cancel{4x}}{(1+2x)^2}\, e^{\frac{1-2x}{1+2x}}$$

$$= \frac{-4}{(1+2x)^2}\, e^{\frac{1-2x}{1+2x}}$$

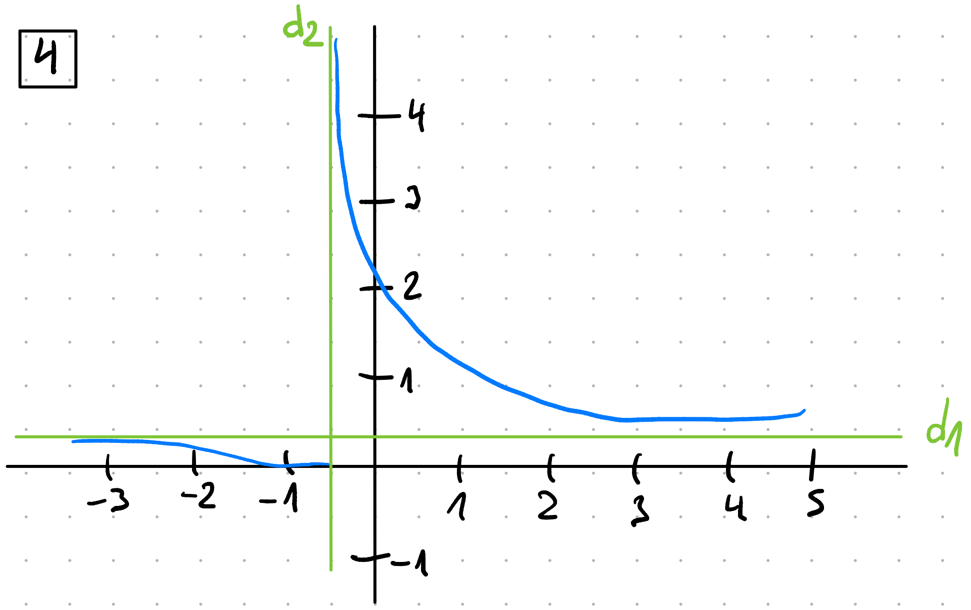
$$= \frac{-4e^{\frac{1-2x}{1+2x}}}{(1+2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4e^{\frac{1-2x}{1+2x}}}{(1+2x)^2} \begin{array}{l} <0 \\ >0 \end{array}$$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\|\|$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | $\|\| +\infty$ | $\searrow$ | $\frac{1}{e}$ |

$\boxed{4}$



## Exercice 71

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^2 + 3x)e^x$.
$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

**1** Étudier les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement.

**2** Démontrer que $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

**3** Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

**4** Étudier les variations de $f$.

**5** Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, tracer $\mathscr{C}_f$ en faisant apparaître toutes les informations déterminées précédemment.

$\boxed{1}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x^2+3x)e^x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \underbrace{2x^2 e^x}_{\to 0} + \underbrace{3xe^x}_{\to 0}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ A. H. : $y = 0$ en $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{(2x^2+3x)}_{\to +\infty}\underbrace{e^x}_{\to +\infty}$$

$$= +\infty$$

$\Rightarrow$ pas de A.H. en $+\infty$

$\boxed{2}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2e^x + 3xe^x}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{2xe^x}_{\to +\infty} + \underbrace{3e^x}_{\to +\infty}$$

$$= +\infty$$

$\Rightarrow$ pas de A.O. en $+\infty$

$\boxed{3}$ Points d'intersection avec l'axe des abscisses :

$$f(x) = 0 \iff (2x^2+3x)\underbrace{e^x}_{>0} = 0$$

$$\Longleftrightarrow x(2x+3)=0$$

$$\Longleftrightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=-\frac{3}{2}$$

$$\mathcal{C}_f \cap (O_y) = \left\{ (0;0) \,;\, \left(0;-\frac{3}{2}\right) \right\}$$

Point d'intersection avec l'axe des ordonnées :

$$f(0) = (2\cdot 0^2 + 3\cdot 0)\, e^0$$
$$= 0$$

$$\mathcal{C}_f \cap (O_x) = \left\{ (0;0) \right\}$$

$\boxed{4}$ $\forall x \in D_{f'}$ : $f'(x) = (4x+3)e^x + (2x^2+3x)e^x$

$$= e^x\left(4x+3+2x^2+3x\right)$$
$$= e^x\left(2x^2+7x+3\right)$$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^x = 0$ ou $2x^2+7x+3=0$

↳ impossible car $e^x > 0$

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c$$
$$= 7^2 - 4\cdot 2\cdot 3$$
$$= 25 \quad (=5^2)$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-5}{2\cdot 2} = -3$$

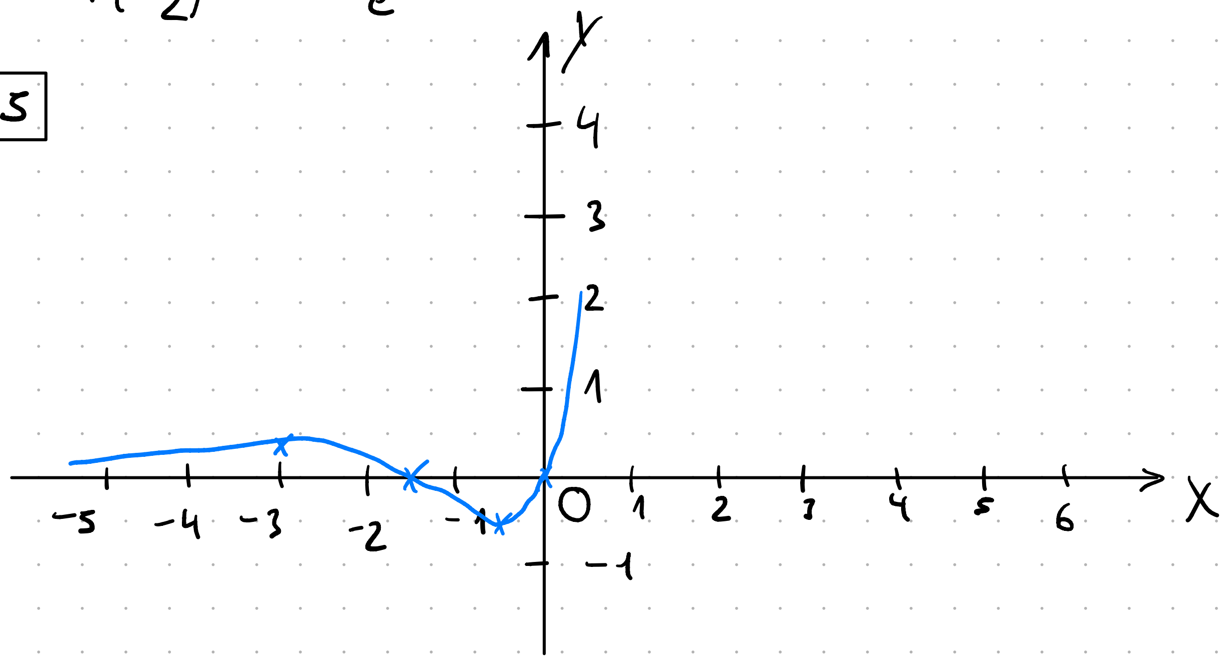
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-7+5}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

T.d.v.

| | $-\infty$ | | $-3$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| | $0$ | ↗ | $9e^{-3}$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\frac{\sqrt{e}}{e}$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

$$f(-3) = 9e^{-3}$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{e}}{e}$$

$\boxed{5}$




## Exercice 72

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 4}{2\,e^{2x} + 1} - x$.

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

**1** Montrer que la droite $d$ d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

**2** Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique $\Delta$ en $-\infty$ dont on déterminera une équation.

**3** Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.

$\boxed{1}$
$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 4}{2e^{2x} + 1} - x + x$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(1 - 4e^{-x})}{e^{2x}(2 + e^{-2x})}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \overbrace{e^{-x}}^{\to 0} \underbrace{\frac{1 - 4e^{-x}}{2 + e^{-2x}}}_{\to \frac{1}{2}}$$
$$= 0$$
$$\Rightarrow \text{A.O.} : d \equiv y = -x \quad \text{en } +\infty$$

$\boxed{2}$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{e^x - 4}{2e^{2x} + 1}}_{\to 4} \overbrace{-x}^{\to +\infty}$$
$$= +\infty$$

$\Rightarrow$ pas de A.H. en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x-4}{2e^{2x}+1} - x}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{\overbrace{\frac{e^x-4}{2e^{2x}+1}}^{\to -4}}{x}}_{\to 0} - 1$$

$$= -1$$

d'où : $a = -1$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-4}{2e^{2x}+1} - x + x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{e^x-4}{2e^{2x}+1}}_{\to -4}$$

$$= -4$$

d'où : $b = -4$

$\Rightarrow$ A.O. : $y = -x-4$ en $-\infty$

$\boxed{3}$ $f(0) = \dfrac{e^0 - 4}{2e^{2\cdot 0}+1} - 0$

$= -1$

$\mathscr{C}_f \cap (O_y) = \{(0;-1)\}$

## Exercice 73

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{(x-1)^2}$.

**1** Donner le tableau de variations de $f$ et les équations des asymptotes horizontales et verticales éventuelles.

**2** Montrer que $\mathscr{C}_f$ n'admet pas d'asymptote oblique.

**3** Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique $\alpha$ dont on donnera un encadrement d'amplitude $10^{-1}$.

$\boxed{1}$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{(x-1)^2}$ $\begin{matrix} \to 0 \\ \to +\infty \end{matrix}$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ A.H.: $y = 0$ en $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{(x-1)^2} \quad \text{f.i. } "\frac{\infty}{\infty}"$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}}_{\to 1}$$

$$= +\infty$$

$\Rightarrow$ pas de A.H.: en $+\infty$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{e^x)\to e}{(x-1)^2)\to 0^+}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{e^x)\to e}{(x-1)^2)\to 0^+}$$

$$= +\infty$$

$\Rightarrow$ A.V. $x = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \quad f'(x) = \frac{e^x (x-1)^2 - 2(x-1)e^x}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{e^x(x-1) - 2e^x}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{e^x(x-3)}{(x-1)^3}$$

Valeurs critiques :

$$f'(x) = 0 \iff \frac{\overbrace{e^x}^{>0}(x-3)}{(x-1)^3} = 0$$

$$\iff x = 3$$

T.d.V.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x(x-3)$ | | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x-3)^2$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty \; \|\| \; +\infty$ | $\searrow$ | $\frac{e^3}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f(3) = \frac{e^3}{4}$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x}{(x-1)^2}}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{(x-1)^2 \, x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3 - 2x^2 + x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x^3}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}}_{\to 1}$

$= +\infty$

$\Rightarrow$ pas d'A.O. en $+\infty$

Comme on a une A.H. en $-\infty$,

$\Rightarrow$ pas d'A.O. en $-\infty$

$\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'A.O.

$\boxed{3}$ $\forall x \in ]1; +\infty[$, $f(x) > 4$

$f(x)$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur

$]-\infty; 1[$, et $4 \in ]0; +\infty[ = f(]-\infty; 1[)$

$\Rightarrow f(x) = 4$ admet une solution unique $\alpha$ sur $]-\infty; 1[$,

$\Rightarrow f(x) = 4$ admet une solution unique $\alpha$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Calculatrice : $0,3 < \alpha < 0,4$

## Exercice 74

$f$ est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$.

**1** Est-ce que la fonction $f$ est continue en 0 ? Justifier !

**2** Calculer $f'(x)$ pour tout $x$ de $]0; +\infty[$.

**3** Est-ce que la fonction $f$ est dérivable en 0 ? Justifier !

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x e^{\sqrt{x}}$

$= 0$

$f$ est continue en $x = 0$.

$\boxed{2}$ $\forall x \in ]0; +\infty[$ :

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} + x e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})'$$

$$= e^{\sqrt{x}} + x e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= e^{\sqrt{x}} \left( 1 + \frac{x}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$= e^{\sqrt{x}} \left( 1 + \frac{\sqrt{x}}{2} \right)$$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cancel{x} e^{\sqrt{x}} - 0}{\cancel{x}}$

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{\sqrt{x}}$$

$$= 1$$

$\Rightarrow f(x)$ est dérivable en $x=0$ et $f'(0)=1$

## Exercice 75

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^* \ \text{ et } \ f(0) = 0$$

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**1** Étudier la continuité de $f$ en 0.

**2** Calculer $f'(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*$.

**3** Dresser le tableau de variations de $f$.

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ f.i. "$\infty \cdot 0$"

posons $t = \frac{1}{x}$

si $x \to 0^+$, alors $t \to +\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty} (1-t)e^{-t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \underbrace{e^{-t}}_{\to 0} - \underbrace{te^{-t}}_{\to 0}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \underbrace{\left(1-\frac{1}{x}\right)}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{\to +\infty} = +\infty$$

$\Rightarrow f(x)$ n'est pas continue en $x=0$.

$\boxed{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + \left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\left(2-\frac{1}{x}\right)$$

$\boxed{3}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f'(x) = 0 \iff \underbrace{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}}_{>0} \left(2-\frac{1}{x}\right) = 0$

$$\iff 2 = \frac{1}{x}$$

$$\iff x = \frac{1}{2}$$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty \;\|\|\; 0$ | $\searrow$ | $-e^{-2}$ | $\nearrow$ | $1$ |

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \underbrace{\left(1 - \overset{\to 0}{\frac{1}{x}}\right)}_{\to 1} \underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{\to 1} = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) e^{-\frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

$$= (1-2)e^{-2}$$

$$= -e^{-2}$$

## Exercice 76

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{-\dfrac{1}{x^2}} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*) \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

Étudier la dérivabilité de $f$ en 0 et interpréter graphiquement.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \text{f.i. } "\infty \cdot 0"$$

Posons $t = \frac{1}{x^2}$, si $x \to 0^+$, alors $t \to +\infty$

D'où :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \to +\infty} t e^{-t}$$

$= 0$

$\Rightarrow f$ est dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 0$

$\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $0$.

**Exercice 77**

**1** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3 + e^{2x}(2x - 3)$.

**a.** Dresser le tableau de variation de la fonction $g$.

**b.** i. Calculer $g(0)$.

ii. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $]1; +\infty[$.

iii. Donner un encadrement de $\alpha$ à $0,01$ près.

iv. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

**2** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{x^3}{2(1 - e^{2x})}$, si $x \neq 0$.

**a.** Calculer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**b.** Démontrer que la fonction $f$ est continue en $x = 0$

**c.** Démontrer que la fonction $f$ est dérivable en $x = 0$ et que $f'(0) = 0$.

**d.** Démontrer que pour tout $x \neq 0$ : $f'(x) = \dfrac{x^2 \cdot g(x)}{2(1 - e^{2x})^2}$.

**e.** Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.

$\boxed{1}$

a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^{2x}(2x - 3) \cdot 2 + 2e^{2x}$

$$= e^{2x}(4x - 4)$$

Valeurs critiques :

$$g'(x) = 0 \iff \underbrace{e^{2x}}_{>0}(4x - 4) = 0$$

$$\iff 4x = 4$$

$$\iff x = 1$$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $3$ | $\searrow$ | $3 - e^2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$\lim_{x\to-\infty}\left[3+e^{2x}(2x-3)\right]=\lim_{x\to-\infty} 3+\underbrace{2x\,e^{2x}}_{\to 0}-\underbrace{3e^{2x}}_{\to 0}$$
$$=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[3+\underbrace{e^{2x}(2x-3)}_{\to+\infty}\right]=+\infty$$

b.

i. $g(x)=0$

ii. $g(x)$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]1;\infty[$.

Comme $0\in\,]3-e^2;+\infty[\,=g(]1;+\infty[)$, unique $\alpha$ sur $]1;+\infty[$.

iii. Calculatrice: $1{,}41<\alpha<1{,}42$

iv. T.d.s.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$\boxed{2}$

a. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\underbrace{x^3}_{\to-\infty}}{\underbrace{2(1-e^{2x})}_{\to 2}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2(1-e^{2x})}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x^3}{e^{2x}}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{2(\underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}-1)}}_{\to-\frac{1}{2}}$$
$$=0$$

b. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2(1-e^{2x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{4}\cdot\frac{2x}{1-e^{2x}}$$

Posons $t=2x \iff x=\frac{1}{2}t$

Si $x\to 0$, alors $t\to 0$

D'où : $$\lim_{t\to 0}\frac{(\frac{1}{2}t)^2}{4}\cdot\frac{t}{1-e^t}=\lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{t^2}{16}}_{\to 0}\cdot\left(\underbrace{\frac{e^t-1}{t}}_{\to 1}\right)^{-1}\cdot(-1)$$

$$= 0$$
$$= f(0)$$

$\Rightarrow$ f est continue en 0.

c. $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2(1-e^{2x})}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{4}\; \frac{2x}{1-e^{2x}}$$
$$= \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{t}{8}}_{\to 0} \cdot \Bigg(-\underbrace{\frac{e^t-1}{t}}_{\to 1}\Bigg)^{-1}$$
$$= 0$$

$\Rightarrow$ f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

d. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2(1-e^{2x}) - x^3(-2e^{2x})}{(1-e^{2x})^2}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2 - 3x^2e^{2x} + 2x^3e^{2x}}{(1-e^{2x})^2}$$
$$= \frac{x^2}{2}\; \frac{3 - e^{2x}(3x^2 - 2x^3)}{(1-e^{2x})^2}$$
$$= \frac{x^2\, g(x)}{2(1-e^{2x})^2}$$

e.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $f(\alpha) \simeq -0{,}03$ | $\nearrow$ | $0$ |

## Exercice 78

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = (x^3 - 2)e^x$ et soit $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**1** **a.** Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition et interpréter graphiquement.

**b.** Vérifier si $C_f$ admet une asymptote oblique.

**2** Dresser le tableau de variation de $f$.

$\boxed{1}$

a. pas de C.E.

$D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2)e^x \quad , \text{ f.i. } "-\infty \cdot 0"$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \underbrace{x^3 e^x}_{\to 0} - \underbrace{2e^x}_{\to 0}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ A.H. : $y = 0$ en $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{(x^3 - 2)}_{\to +\infty} \underbrace{e^x}_{\to +\infty}$$

$$= +\infty$$

$\Rightarrow$ pas de A.H.

b. pas d'A.O. en $-\infty$, car il y a une A.H.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^3 - 2)e^x}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 e^x}{x} \left(1 - \frac{2}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^2 e^x}_{\to +\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{x^3}\right)}_{\to 1}$$

$$= +\infty$$

pas d'A.O. en $+\infty$

$\boxed{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 e^x + (x^3 - 2)e^x$

$$= e^x(3x^2+x^3-2)$$

Valeurs critiques: $f'(x)=0 \iff \underbrace{e^x}_{>0}(3x^2+x^3-2)=0$

$$\iff x^3+3x^2-2=0$$

Schéma de Horner:

| | 1 | 3 | 0 | -2 |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | | $-1$ | $-2$ | $2$ |
| | $1$ | $2$ | $-2$ | $0$ |

$$\iff (x+1)(x^2+2x-2)=0$$

$$\iff x=-1 \text{ ou } x^2+2x-2=0$$

$$\Delta = b^2-4ac$$
$$= 4-4\cdot 2\cdot 2$$
$$= 12$$

$$\iff x=-1 \text{ ou } x=-1-\sqrt{3} \text{ ou } x=-1+\sqrt{3}$$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $-1+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $\simeq -1{,}45$ | ↗ | $-\frac{3}{e}$ | ↘ | $\simeq -3{,}35$ | ↗ | $+\infty$ |

$f(-1-\sqrt{3}) \simeq -1{,}45$

$f(-1) = -\frac{3}{e}$

$f(-1+\sqrt{3}) \simeq -3{,}35$

## Exercice 79

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{2x^3 - x - 1}$ et soit $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**1** Déterminer le ensemble de définition de $f$.

**2** Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition et interpréter graphiquement.

**3** Dresser le tableau de variation de $f$.

$\boxed{1}$ C.E. $2x^3 - x - 1 \neq 0$

Soit: $g(x) = 2x^3 - x - 1$

$g(1) = 0$

Schéma de Horner:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | -1 | -1 |
| 1 | | 2 | 2 | 1 |
| | 2 | 2 | 1 | 0 |

D'où : $g(x) = (x-1)(2x^2+2x+1)$

$g(x) = 0 \iff x = 1$ ou $2x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1$

$= -4 \ (<0)$

C.E. : $g(x) \neq 0 \iff (x-1)\underbrace{(2x^2+2x+1)}_{>0 \ \forall x \in \mathbb{R}} \neq 0$

$\iff x \neq 1$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{2x^3 - x - 1}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x^3}}_{\to 0} \underbrace{\frac{1}{2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}}_{\to \frac{1}{2}}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ A.H. : $y = 0$ en $-\infty$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{e^x}{2x^3 - x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\overbrace{e^x}^{\to e}}{\underbrace{(x-1)}_{\to 0^-}\underbrace{(2x^2+2x+1)}_{\to 5}}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\overbrace{e^x}^{\to e}}{\underbrace{(x-1)}_{\to 0^+}\underbrace{(2x^2+2x+1)}_{\to 5}}$$

$$= +\infty$$

$\Rightarrow$ A.V. : $d' \equiv x = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x^2 - x - 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{\to +\infty} \underbrace{\frac{1}{2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}}_{\to \frac{1}{2}}$$

$$= +\infty$$

$\Rightarrow$ pas d'A.H. : en $+\infty$

Recherche d'éventuelle A.O. en $+\infty$ :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x}{2x^3 - x - 1}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x^4}}_{\to +\infty} \underbrace{\frac{1}{2 - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}}_{\to \frac{1}{2}}$$

$$= +\infty$$

$\Rightarrow$ pas d'A.O. en $+\infty$

$\boxed{3}$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\quad f'(x) = \dfrac{e^x(2x^3-x-1) - e^x(6x^2-1)}{(2x^3-x-1)^2}$

$$= \frac{e^x(2x^3-6x^2-x)}{(2x^3-x-1)^2}$$

$$= \frac{xe^x(2x^2-6x-1)}{(2x^3-x-1)^2}$$

Valeurs critiques :

$$f'(x) = 0 \iff xe^x(2x^2-6x-1) = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{e^x = 0}_{\text{impossible}} \quad \text{ou} \quad 2x^2-6x-1=0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 36 - 4 \cdot 2 \cdot 1$$
$$= 44$$

$$x_1 = \frac{6-2\sqrt{11}}{4} = \frac{3-\sqrt{11}}{2}$$

$$x_2 = \frac{6+2\sqrt{11}}{4} = \frac{3+\sqrt{11}}{2}$$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3-\sqrt{11}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3+\sqrt{11}}{2}$$

T.d.v.

| | $-\infty$ | | $\frac{3-\sqrt{11}}{2}$ | | $0$ | | $1$ | | $\frac{3+\sqrt{11}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2x^2-6x-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $f\left(\frac{3-\sqrt{11}}{2}\right)$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty \Vert +\infty$ | $\searrow$ | $f\left(\frac{3+\sqrt{11}}{2}\right)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f(0) = -1$

**Exercice 80**

Déterminer le ensemble de définition de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x - x - 1}$.

C.E.: $e^x - x - 1 \neq 0$

Soit : $g(x) = e^x - x - 1$ , $D_g = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x - 1$

Valeurs critiques : $g'(x) = 0 \iff e^x = 1$

$\iff x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \overset{\to 0}{e^x} \underbrace{- x}_{\to +\infty} - 1$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \overset{\to +\infty}{e^x} \underbrace{\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)}_{\to 1}$

$= +\infty$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$g(0) = e^0 - 0 - 1$

$= 0$

$\Rightarrow$ l'équation $g(x) = 0$ admet donc une solution unique $x = 0$ sur $\mathbb{R}$

Finalement : $D_f = \mathbb{R}^*$

**Exercice 81**

La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3-x)e^x$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et $T_a$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$.

Prouver qu'il existe deux valeurs de $a$ telles que $T_a$ est parallèle à la droite $d$ d'équation $y = 2x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^x + (3-x)e^x$

$$= e^x(2-x)$$

$$T_a \parallel d \iff f'(a) = 2$$

$$\iff e^a(2-a) = 2$$

$$\iff e^a(2-a) - 2 = 0$$

Posons : $g(x) = e^x(2-x) - 2$ ; $D_g = \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = e^x(2-x) - e^x$$

$$= e^x(1-x)$$

Valeurs critiques: $g'(x) = 0 \iff \underbrace{e^x}_{>0}(1-x) = 0$

$$\iff x = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x(2-x) - 2$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \underbrace{e^x(2-x)}_{\to 0} - 2$$

$$= -2$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{e^x(2-x)}_{\to -\infty} - 2$$

$$= -\infty$$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-2$ | ↗ | $e-2$ | ↘ | $-\infty$ |

$g(1) = e - 2 > 0$

- Comme $g(x)$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-\infty;1[$, et comme $0 \in ]-2; e-2[ = g(]-\infty;1[)$
$\Rightarrow g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ sur $]-\infty;1[$
- Comme $g(x)$ est continue (car dérivable) et strictement décroissante

et comme $0 \in ]-\infty ; e-2[ = g(]1;+\infty[)$

$\Rightarrow g(x)=0$ admet une solution unique $\beta$ sur $]1;+\infty[$

Il existe alors exactement 2 tangentes parallèles à $d$ : $T_\alpha$ et $T_\beta$

**Exercice 82**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)\cdot e^x$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Soit $d$ la droite d'équation $y = -3\,x$.
Déterminer le nombre de tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui sont parallèles à la droite $d$.

Soit $T_a$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$.

$$T_a \parallel d \iff f'(a) = -3$$
$$\iff -e^a + (2-a)e^a = -3$$
$$\iff e^a(1-a) = -3$$

Posons : $g(x) = e^x(1-x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ : $g'(x) = e^x(1-x) - e^x$
$$= e^x(-x)$$

Valeurs critiques :

$$g'(x) = 0 \iff -x\overbrace{e^x}^{>0} = 0$$
$$\iff x = 0$$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$g(0) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x(1-x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{e^x}_{\to +\infty}\overbrace{(1-x)}^{\to -\infty}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \underbrace{e^x}_{\to 0} - \underbrace{xe^x}_{\to 0} \qquad = -\infty$$

$$= 0$$

$\forall x \in ]-\infty ; 0[ \; ; g(x) > -3$

$g(x)$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$,

et $-3 \in ]-\infty ; 1[ = g(]0 ; +\infty[)$

$\Rightarrow g(x) = -3$ admet une solution unique $\alpha$ sur $]0 ; +\infty[$.

$\Rightarrow g(x) = -3$ admet une solution unique $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.

Finalement, il existe une seule tangente $T_\alpha$ parallèle à $d$.

## Exercice 83

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1) \cdot e^x$.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes qui passent par le point $A(2;0)$.

$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = e^x + (x+1)e^x$

$$= e^x (x+2)$$

$T_a : y = e^a(a+2)(x-a) + (a+1)e^a$

$A(2;0) \in T_a \iff 0 = e^a(a+2)(2-a) + (a+1)e^a$

$$\iff e^a[(\cancel{2a} - a^2 + 4 - \cancel{2a}) + (a+1)] = 0$$

$$\iff \underbrace{e^a}_{>0}(-a^2 + a + 5) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 1 + 4 \cdot 1 \cdot 5$$

$$= 21 \quad (>0)$$

$$a_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$$

$$a_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$$

$\Rightarrow$ il existe 2 tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui passent par $A(0;2)$.

## Exercice 84

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} + x$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.
Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes qui passent par le point $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{-x} + 1$

$T_a \equiv y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$$A\left(0;\tfrac{1}{2}\right) \in T_a \iff \frac{1}{2} = (-e^{-a}+1)(0-a) + e^{-a} + a$$

$$\iff a e^{-a} \cancel{-a} + e^{-a} \cancel{+a} = \frac{1}{2}$$

$$\iff e^{-a}(1+a) = \frac{1}{2}$$

Posons : $g(x) = e^{-x}(1+x)$

Recherche des solutions de $g(x) = \frac{1}{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -e^{-x}(x+1) + e^{-x}$

$$= -xe^{-x}$$

Valeurs critiques : $g'(x) = 0 \iff -x\underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0$

$$\iff x = 0$$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

$g(0) = 1$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty} \underbrace{(x+1)}_{\to -\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x}(x+1) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{xe^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}$$

$$= 0$$

$g(x)$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-\infty;0[$,

et $\frac{1}{2} \in ]-\infty;1[ = g(]-\infty;0[)$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique $\alpha$ sur $]-\infty;0[$

$g(x)$ est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

et $\frac{1}{2} \in ]0;1[ = g(]0;+\infty[)$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique $\beta$ sur $]0;+\infty[$

$\Rightarrow$ il existe deux tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par $A(0;\frac{1}{2})$ : $T_\alpha$ et $T_\beta$

## Exercice 85

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2\,e^x}$.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Déterminer le nombre de tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par le point $A(0;1)$.

$$T_a \equiv y = f'(a)(x-a) + f'(a)$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \frac{e^x . \cancel{2e^x} - \cancel{2e^x}(e^x - 1)}{(2e^x)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{e^x - e^x + 1}{2e^x}$$

$$= \frac{1}{2e^x}$$

$$A(0;1) \in T_a \iff 1 = f'(a)(0-a) + f(a)$$

$$\iff 1 = \frac{1}{2e^a}(-a) + \frac{e^a - 1}{2e^a}$$

$$\iff 1 = \frac{-a + e^a - 1}{2e^a}$$

$$\iff 2e^a + a - e^a + 1 = 0$$

$$\iff e^a + a + 1 = 0$$

Posons : $g(x) = e^x + x + 1$ ; $D_g = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + 1$

Valeurs critiques : $g'(x) = 0 \iff e^x = -1$ impossible

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g'(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ |

Point test :

$g'(1) = e^1 + 1 > 0$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{e^x - 1}^{\to -1}}{\underbrace{2e^x}_{\to 0^+}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{2e^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} \underbrace{\frac{1 - \overbrace{\frac{1}{e^x}}^{\to 0^+}}{2}}_{\to \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$g(x)$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $g(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ il existe une tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par $A(0;1)$ : $T_\alpha$

**Exercice 86**

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$. Démontrer qu'il existe deux tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui passent par le point $A(1;0)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$

$T_a \equiv y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$A(0;1) \in T_a \iff 0 = f'(a)(1-a) + f(a)$

$$\Longleftrightarrow (e^a-1)(1-a)+(e^a-a)=0$$

$$\Longleftrightarrow e^a-ae^a-1\cancel{+a}+e^a\cancel{-a}=0$$

$$\Longleftrightarrow 2e^a-ae^a-1=0$$

$$\Longleftrightarrow e^a(2-a)=1$$

Posons : $g(x)=e^x(2-x)$

$\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=e^x(2-x)-e^x$

$\qquad\qquad = e^x(1-x)$

Valeurs critiques : $g'(x)=0 \Longleftrightarrow e^x(1-x)=0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Longleftrightarrow x=1$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $e$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$g(1)=e$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x(2-x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} \underbrace{2e^x}_{\to 0}-\underbrace{xe^x}_{\to 0}$$

$$=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x(2-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \overbrace{xe^x}^{\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{2}{x}-1\right)}_{\to -1}$$

$$=-\infty$$

$g(x)$ est continue (car derivable) et strictement croissante sur $]-\infty;1[$, et $1\in\,]0;e[\,=g(]-\infty;1[)$

$\Rightarrow g(x)=1$ admet une solution unique $\alpha$ sur $]-\infty;1[$.

$g(x)$ est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur

$]1;+\infty[$, et $1 \in ]-\infty;e[ = g(]1;+\infty[)$

$\Rightarrow g(x) = 1$ admet une solution unique $\beta$ sur $]1;+\infty[$.

Finalement, il existe deux tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par $A(0;1)$ : $T_\alpha$ et $T_\beta$

## Exercice 87

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x} + 4x$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

**1** Déterminer le nombre de tangentes $\mathscr{C}_f$ qui passent par le point $A(0;-1)$.

**2** Déterminer le nombre de tangentes $\mathscr{C}_f$ qui passent par le point $B(1;2)$.

$$T_a \equiv y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2e^{-2x} + 4$$

$\boxed{1}$ $A(0;-1) \in T_a \iff -1 = (-2e^{-2\cdot a}+4)(-a) + e^{-2\cdot a} + 4\cdot a$

$$\iff 2ae^{-2a} \cancel{-4a} + e^{-2a} \cancel{+4a} = -1$$

$$\iff e^{-2a}(2a+1) = -1$$

Posons : $g(x) = e^{-2x}(2x+1)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -2e^{-2x}(2x+1) + 2e^{-2x}$$

$$= 2e^{-2x}(-2x+1)$$

$$= -4xe^{-2x}$$

Valeurs critiques :

$$g'(x) = 0 \iff -4x\underbrace{e^{-2x}}_{>0} = 0$$

$$\iff x = 0$$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $e$ | $\searrow$ | $0$ |

$g(0) = e$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-2x}(2x+1) \quad \left(f.i.\ \text{"}-\infty \cdot 0\text{"}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{xe^{-2x}}_{\to -\infty}\underbrace{\left(2+\frac{1}{x}\right)}_{\to 2}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x}(2x+1)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{2xe^{-2x}}_{\to 0} + \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}$$

$$= 0$$

$\forall x \in [0;+\infty[,\ g(x) > -1$

$g(x)$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-\infty;0[$, et $-1 \in ]-\infty;1[ = g(]-\infty;0[)$

$\Rightarrow g(x) = -1$ admet une solution unique $\alpha$ sur $]-\infty;0[$, et donc sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Il existe une tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par $A(0;-1)$

$\boxed{2}$ $B(1;2) \in T_a \iff 2 = (-2e^{-2a}+4)(1-a) + e^{-2a} + 4a$

$$\iff 2 = -2e^{-2a} + 2ae^{-2a} + 4 \cancel{-4a} + e^{-2a} \cancel{+4a}$$

$$\iff e^{-2a}\left(-2 + 2a + 1\right) = 2$$

$$\iff e^{-2a}\left(2a - 1\right) = 2$$

Posons : $g(x) = e^{-2x}(2x-1)$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2e^{-2x}(2x-1) + 2e^{-2x}$$
$$= -2e^{-2x}(2x-1-1)$$
$$= -4e^{-2x}(x-1)$$

Valeurs critiques :

$$g(x) = 0 \iff \underbrace{-4e^{-2x}}_{>0}(x-1) = 0$$

$$\iff x = 1$$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e^{-2}}$ | $\searrow$ | $0$ |

$g(0) = e^{-2}$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -4e^{-2x}(x-1)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{-4xe^{-2x}}_{\to -\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} -4e^{-2x}(x-1)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{-4xe^{-2x}}_{\to 0} + \underbrace{4e^{-2x}}_{\to 0}$$

$\forall x \in [1;+\infty[,\ g(x) > -2$

$g(x)$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-\infty;1[$ et $-2 \in ]-\infty; e^{-2}[ = g(]-\infty;1[)$

$\Rightarrow g(x) = -2$ admet une solution unique sur $]-\infty; 1[$, et donc sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ il existe une seule tangente $T_a$ à $\mathscr{C}_f$ passant par $B(1;2)$

**Exercice 88**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,e^{3\,x} + b\,e^{-x} \quad (a, b \in \mathbb{R})$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.
Déterminer les réels $a$ et $b$ sachant que la tangente $\mathscr{C}_f$ au point $A(0; -1)$ a pour pente 2.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3ae^{3x} - be^{-x}$

$A(0;1) \in T_a \iff f(0) = -1$

pente de la tangente en $x = 0$ est $2 \iff f'(0) = 2$

On trouve alors : $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f'(0) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b = -1 & ① \\ 3a - b = 2 & ② \end{cases}$

①: $a = -1-b$

Dans ②: $3(-1-b) - b = 2$

$\iff -3 - 3b - b = 2$

$\iff -4b = 5$

$\iff b = -\frac{5}{4}$

①: $b = -1 - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}$

D'où : $f(x) = \frac{1}{4}e^{3x} - \frac{5}{4}e^{-x}$

**Exercice 89**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,e^{3\,x} + b\,e^{2\,x} \quad (a, b \in \mathbb{R})$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.
Soit $d$ la droite d'équation $x - y - 2020 = 0$.
Déterminer les réels $a$ et $b$ sachant que la tangente $\mathscr{C}_f$ au point $A(0; -1)$ est parallèle à $d$.

$d \equiv y = x - 2020$

$T_0 \,//\, d \iff f'(0) = 1$

$A(0\,;-1) \in \mathcal{C}_f \iff f(0) = -1$

D'où le système suivante :

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3ae^0 + 2be^0 = 1 \\ ae^0 + be^0 = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3a + 2b = 1 & (1) \\ a + b = -1 & (2) \end{cases}$$

(2) : $a = -1 - b$

Dans (1) : $3(-1-b) + 2b = 1 \iff -3 - 3b + 2b = 1$

$\iff -b = 4$

$\iff b = -4$

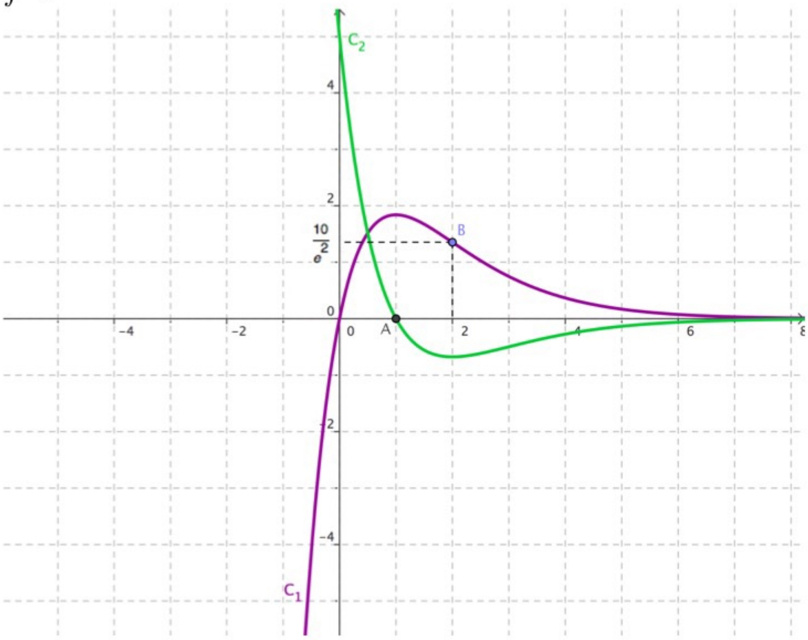
Dans (2) : $a = -1 - (-4)$

$= 3$

D'où : $f(x) = 3e^{3x} - 4e^{2x}$

## Exercice 90

Parmi les courbes ci-contre, l'une est celle d'une fonction $f$ et l'autre est celle de sa fonction dérivée $f'$ :




**1** Laquelle des deux courbes représente $f$ ? Laquelle représente $f'$ ? Justifier !

**2** On sait que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,x \cdot e^{bx}$ où $a$ et $b$ sont deux réels non-nuls.

**a.** Utiliser les informations du graphique pour déterminer $a$ et $b$.

**b.** Donner ensuite l'expression de $f(x)$, puis celle de $f'(x)$.

$\boxed{1}$ T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_1$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Donc : $f_2 \longrightarrow f'$ , $\mathscr{C}_2 = \mathscr{C}_{f'}$

$f_1 \longrightarrow f$ , $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_f$

$\boxed{2}$

a) $A(1;0) \in \mathscr{C}_{f'} \implies f'(1) = 0$

$B\left(2;\frac{10}{e^2}\right) \in \mathscr{C}_f \implies f(2) = \frac{10}{e^2}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = ae^{bx} + axe^{bx}$

A partir du graphique, on trouve le système suivant :

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(2) = \frac{10}{e^2} \end{cases} \iff \begin{cases} ae^b + abe^b = 0 & (1) \\ a \cdot 2 \cdot e^{2b} = \frac{10}{e^2} & (2) \end{cases}$$

$$(2) : \quad 2ae^{2b} = 10 \cdot e^{-2} \iff \begin{cases} 2a = 10 \\ e^{2b} = e^{-2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \end{cases}$$

Verifions dans (1) : $5 \cdot e^{-1} + 5(-1)e^{-1} = 5e^{-1} - 5e^{-1}$

$= 0$ ✓

b) Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 5xe^{-x}$

et $f'(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x}$

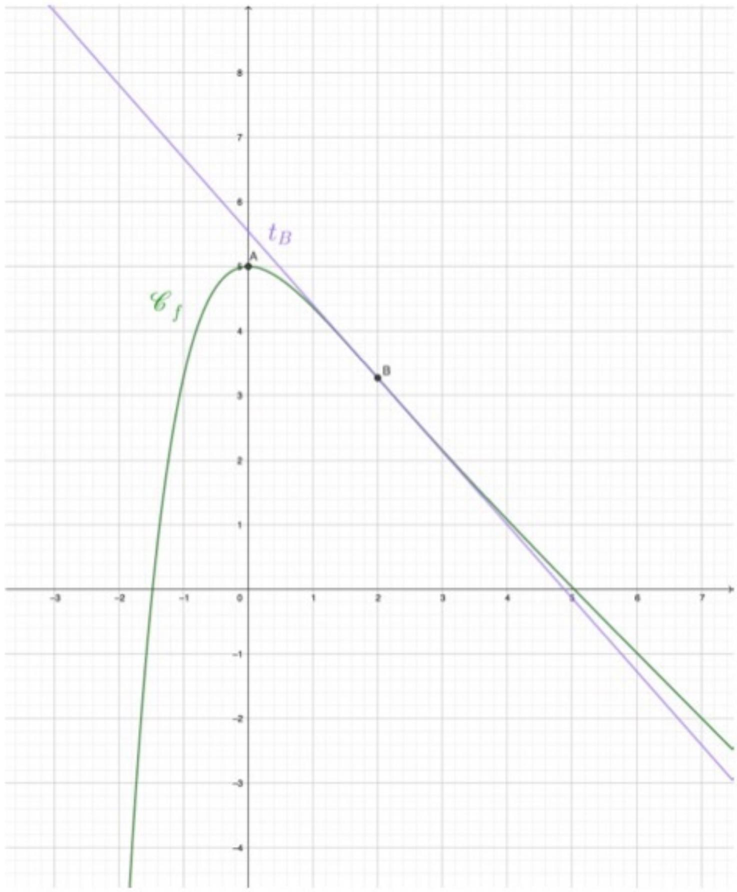
$= 5e^{-x}(1-x)$

## Exercice 91

On donne ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b + \frac{x}{e^x} \quad (a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels non nuls})$$

La tangente $t_B$ à $\mathscr{C}_f$ au point $B$ a pour coefficient directeur $-\frac{1}{e^2} - 1$.




**1** Utiliser les informations du graphique pour déterminer $a$ et $b$.

**2** Donner ensuite l'expression de $f(x)$, puis celle de $f'(x)$.

**3** En déduire le tableau de variation de $f$.

$\boxed{1}$ $A(0;5) \in \mathscr{C}_f \iff f(0) = 5$

coefficient directeur de $t_B$ est $-\frac{1}{e^2} - 1$

$$\iff f'(2) = -\frac{1}{e^2} - 1$$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} f(0) = 5 \\ f'(2) = -\frac{1}{e^2} - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 5 \\ a + \frac{e^2 - 2e^2}{(e^2)^2} = -\frac{1}{e^2} - 1 \end{cases} \quad \circledast$$

$$⊛ : a+\frac{\cancel{e^2}-2\cancel{e^2}}{e^{\cancel{4}\,2}}=-\frac{1}{e^2}-1 \iff a=-\frac{1}{e^2}-1-\frac{1-2}{e^2}$$

$$=-\cancel{\frac{1}{e^2}}-1+\cancel{\frac{1}{e^2}}$$

$$=-1$$

$\boxed{2}$ D'où $\forall x\in\mathbb{R}$ : $f(x)=-x+5+\frac{x}{e^x}$

et $f'(x)=-1+\frac{\cancel{e^x}-x\cancel{e^x}}{(e^x)^{\cancel{2}\,1}}$

$$=-1+\frac{1-x}{e^x}$$

$$=\frac{-e^x+1-x}{e^x}$$

$\boxed{3}$ T.d.v

| | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

## Exercice 92

$f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=(a\,x^2+b\,x+c)\cdot e^{-x} \text{ avec } a\in\mathbb{R}^* \text{ et } b,\ c\in\mathbb{R}$$

La fonction $f$ a pour tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $\frac{9}{e}$ | $\searrow$ | |

**1** A l'aide des renseignements portés dans le tableau, déterminer les nombres $a$, $b$ et $c$.

**2** Compléter le tableau de variation en justifiant les réponses.

**3** Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec $(Ox)$.

$\boxed{1}$ $f'(-\frac{3}{2})=0$

$f'(1)=0$

$f(1)=\frac{9}{e}$

$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = (2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx+c)e^{-x}$

$$= e^{-x}\left[-ax^2+(2ab-b)x+b-c\right]$$

Par lecture du tableau de variation:

$$\begin{cases} f'(-\frac{3}{2})=0 \\ f'(1)=0 \\ f(1)=\frac{9}{e} \end{cases} \iff \begin{cases} e^{\frac{3}{2}}\left[-a\cdot\frac{9}{4}-(2a-b)\frac{3}{2}\ +b-c\right]=0 \\ e^{-1}\left[-a+2a-b+b-c\right]=0 \\ (a+b+c)\cdot\cancel{e^{-1}}=\frac{9}{\cancel{e}} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{21}{4}a+\frac{5}{2}b-c=0 & ① \\ a-c=0 & ② \\ a+b+c=9 & ③ \end{cases}$$

② : $a=c$

Dans ③ : $2a+b=9 \iff b=9-2a$ ⊛

Dans ①: $-\frac{21}{4}a+\frac{5}{2}(9-2a)-a=0$

$\iff -\frac{21}{4}a+\frac{45}{2}-5a-a=0$

$\iff -\frac{45}{4}a+\frac{45}{2}=0$

$\iff -45a+90=0$

$\iff a=2\quad (=c)$

Dans ⊛: $b=9-2\cdot 2$

$=5$

Finalement: $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=(2x^2+5x+2)e^{-x}$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2+5x+2)\,e^{-x}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\left(2+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}_{\to 2} \underbrace{x^2}_{\to+\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}$$

$$= +\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2+5x+2)\,e^{-x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\left(2+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}_{\to 2} \underbrace{x^2\, e^{-x}}_{\to 0}$$

$$= 0$$

$$f\left(-\tfrac{3}{2}\right) = \left(2\cdot\tfrac{9}{4} - \tfrac{15}{2} + 2\right) e^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left(\tfrac{18}{2} - \tfrac{15}{2} - 2\right) e^{\frac{3}{2}}$$

$$= -e^{\frac{3}{2}}$$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-e^{\frac{3}{2}}$ | $\nearrow$ | $\frac{9}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

$\boxed{3}$ $f(x) = 0 \iff (2x^2+5x+2)\underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0$

$$\iff 2x^2+5x+2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 25 - 4\cdot 2\cdot 2$$

$$= 3^2$$

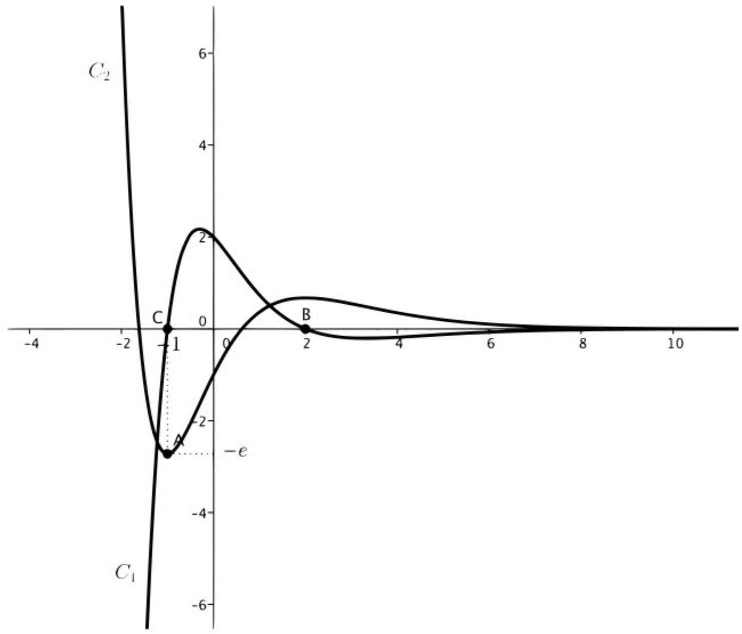
$$x_1 = \frac{-5-3}{4} = -2$$

$$x_2 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$\mathcal{C}_f \cap (Ox) = \{(-2;0);(-\frac{1}{2};0)\}$

**Exercice 93**

Parmi les courbes ci-contre, l'une représente une fonction $f$ et l'autre sa fonction dérivée $f'$ :




**1** Laquelle des deux courbes représente $f$ ? Laquelle représente $f'$ ?
Justifier à l'aide d'un tableau de variations !

**2** On sait que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (a\,x^2 + b\,x + c) \cdot e^{-x}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b,\ c \in \mathbb{R}$.

**a.** Utiliser les informations du graphique pour déterminer $a$, $b$ et $c$ ; puis montrer que $f(x) = (x^2 + x - 1)\,e^{-x}$.

**b.** Donner l'expression de $f'(x)$.

**c.** Donner le tableau de variation de $f$.

**d.** Donner l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $T_0$.

$\boxed{1}$ T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_2$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

$\Rightarrow f_1 \longrightarrow f'$ $\qquad \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_{f'}$

$f_2 \longrightarrow f$ $\qquad \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_f$

$\boxed{2}$

a. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx+c)e^{-x}$

$$= e^{-x}(2ax + b - ax^2 - bx - c)$$

$$= e^{-x}\left[-ax^2 + (2a-b)x + b - c\right]$$

On a : • $A(-1\,;-e) \in \mathscr{C}_f \iff f(-1) = -e$

• $B(2\,;0) \in \mathscr{C}_{f'} \iff f'(2) = 0$

• $C(-1\,;0) \in \mathscr{C}_f \iff f'(-1) = 0$

D'où :

$$\begin{cases} f(-1) = e \\ f'(2) = 0 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (a-b+c)e = -e \\ e^{-2}(-4a + 4a - 2b + b - c) = 0 \\ e^{1}(-a - 2a + b + b - c) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a - b + c = -1 & (1) \\ b + c = 0 & (2) \\ -3a + 2b - c = 0 & (3) \end{cases}$$

(2) : $b = -c$

Dans (1) : $a + c + c = -1 \iff a = -1 - 2c$

Dans (3) : $-3(-1-2c) + 2(-c) - c = 0$

$$\iff 3 + 6c - 2c - c = 0$$

$$\iff 3 + 3c = 0$$

$$\iff c = -1$$

Donc : $b = -(-1) = \underline{1}$

$a = -1 - 2(-1) = \underline{1}$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x^2 + x - 1)e^{-x}$

b. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (2x+1)e^{-x} - (x^2 + x - 1)e^{-x}$

$$= e^{-x}(2x + 1 - x^2 - x + 1)$$

$$= e^{-x}(-x^2 + x + 2)$$

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{(x^2 + x - 1)}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty}$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x - 1) e^{-x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}_{\to 1} \underbrace{x^2 e^{-x}}_{\to 0}$

$= 0$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-e$ | $\nearrow$ | $5e^{-2}$ | $\searrow$ | $0$ |

$f(-1) = -e$

$f(2) = 5e^{-2}$

d. $f'(0) = 2 \quad ; \quad f(0) = -1$

$T_0 \equiv y = 2x - 1$

## Exercice 94

(**Vrai ou faux ?**)

Vérifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier !

**1** **Affirmation :** L'inéquation $e^{x^2} \geq (e^x)^2$ a pour ensemble de solution l'intervalle $[0; 2]$.

**2** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*_-$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**Affirmation :**

*La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-2$ est parallèle à la droite $d$ d'équation $y = \frac{e^4 - 5}{4e^4}x + 3$.*

**3** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} \cdot (1 - 2x) + 1$.

**Affirmation :**

*L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.*

$\boxed{1}$ $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x^2} \geq (e^x)^2 \iff e^{x^2} \geq e^{2x}$

$$\iff x^2 \geqslant 2x$$
$$\iff x^2 - 2x \geq 0$$
$$\iff x(x-2) \geqslant 0$$

T.d.s.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S = ]-\infty ; 0] \cup [2 ; +\infty[$

Donc : Faux

$\boxed{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*_-$ , $f'(x) = \dfrac{2xe^{2x} - (e^{2x} - 1)}{x^2}$

$$= \frac{2xe^{2x} - e^{2x} - 1}{x^2}$$

$$f'(-2) = \frac{2e^{-4} \cdot (-2) - e^{-4} + 1}{4}$$

$$= \frac{-4e^{-4} - e^{-4} + 1}{4}$$

$$= \frac{-5e^{-4} + 1}{4}$$

$$= \frac{-5 + e^4}{4e^4}$$

Comme la pente de $T_{-2}$ est égale à celle de $d$, $T_{-2} \mathbin{/\!/} d$

Donc : Vrai

$\boxed{3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}(1-2x) + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{2x}(1-2x) - 2e^{2x}$

$$= \cancel{2e^{2x}} - 4xe^{2x} \cancel{- 2e^{2x}}$$

$$= -4xe^{2x}$$

Valeurs critiques :

$$f'(x) = 0 \iff -4x\underbrace{e^{2x}}_{>0} = 0$$

$$\iff x = 0$$

T.d.v.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$f(0) = 2$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x}(1-2x)+1$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^{2x}\cdot x}_{\to 0}\underbrace{\left(\frac{1}{x}-2\right)}_{\to -2}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{2x}}_{\to+\infty}\underbrace{(1-2x)}_{\to-\infty}+1$$

$$= -\infty$$

$\forall x \in ]-\infty;0]$, $f(x) > 0$

$f(x)$ est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, et $0 \in ]-\infty;2[ = f(]0;+\infty[)$

$\Rightarrow$ $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ sur $]0;+\infty[$

$\Rightarrow$ Vrai, $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.